

ЛЕКЦИЯ 15.
Движение шарового
и симметрического волчков

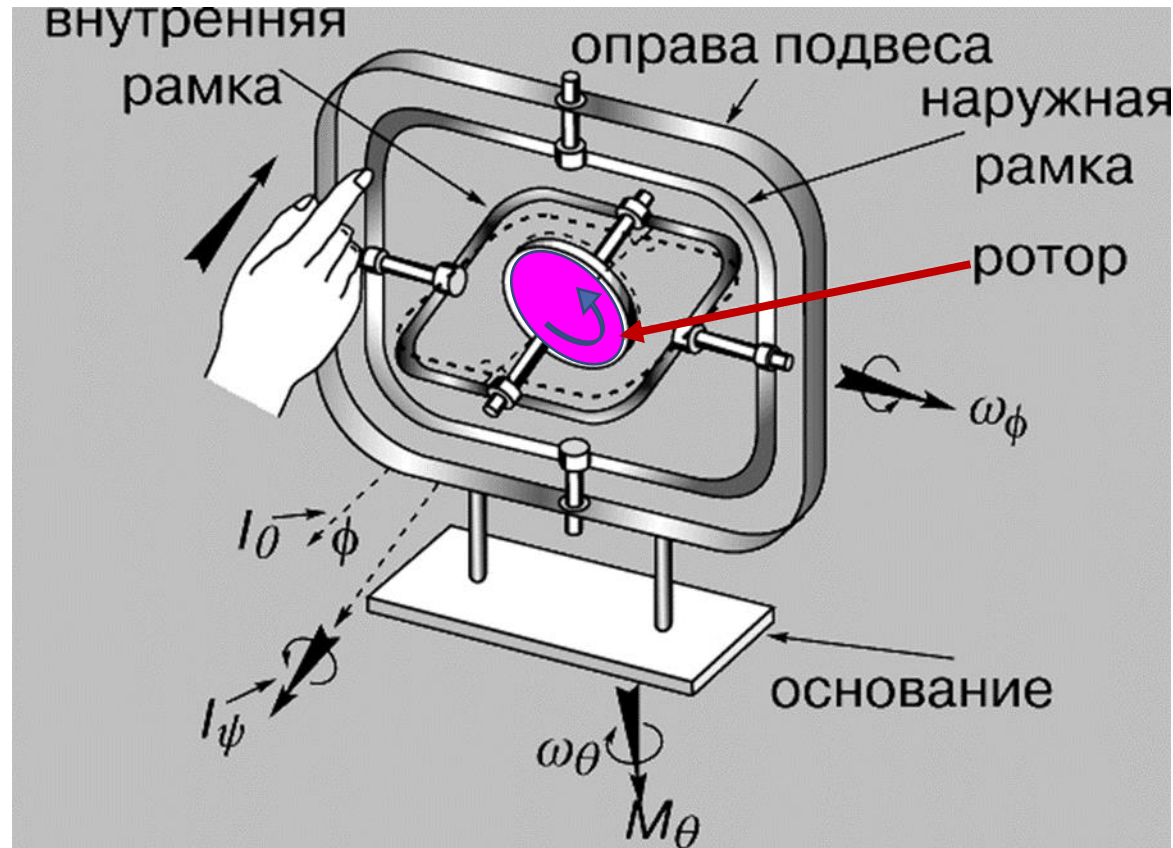
А.И. Валишев, В.Г. Сербо.

Гироскоп.

Гироскоп – (греч. *γυρο* - вращение *σκοπεω* - смотреть.

Механический, роторный гироскоп. Изобретен И. Боненбергер 1817 г.

Гироскоп – быстро вращающееся твердое тело, ось вращения которого может менять направление в пространстве.



Модели гироскопов.



Гироскоп Фуко
(построил
Дюмолен-Фромент, 1852)



Гироскоп на МАКС-2009

Физические схемы гироскопов.

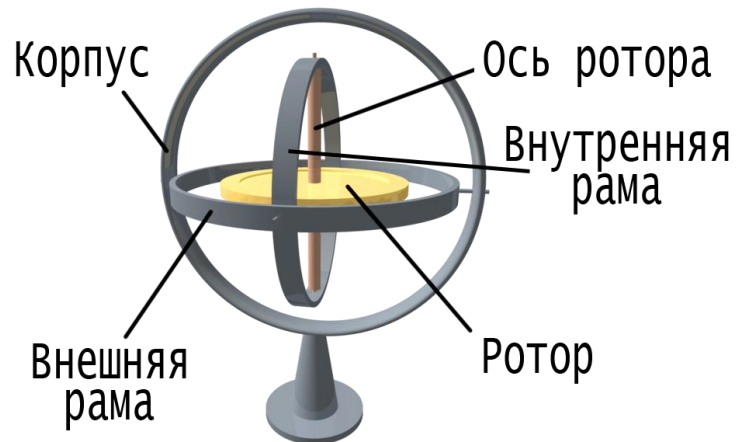


Схема гироскопа.

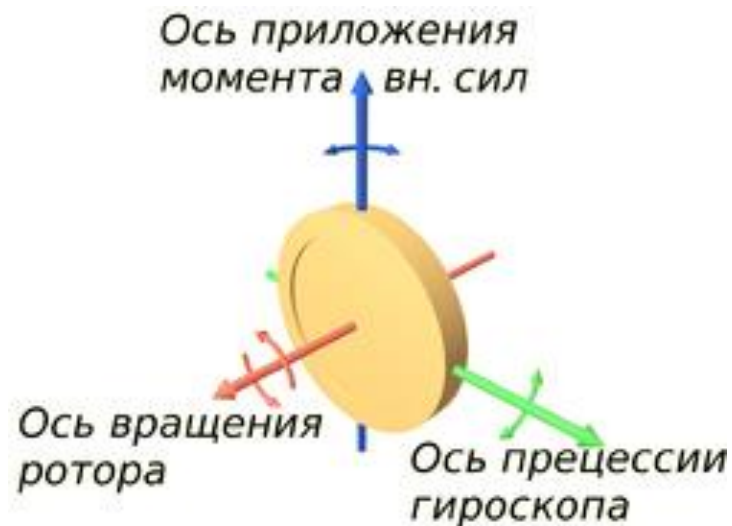


Схема приложения моментов внешних сил.
Ось прецессии.

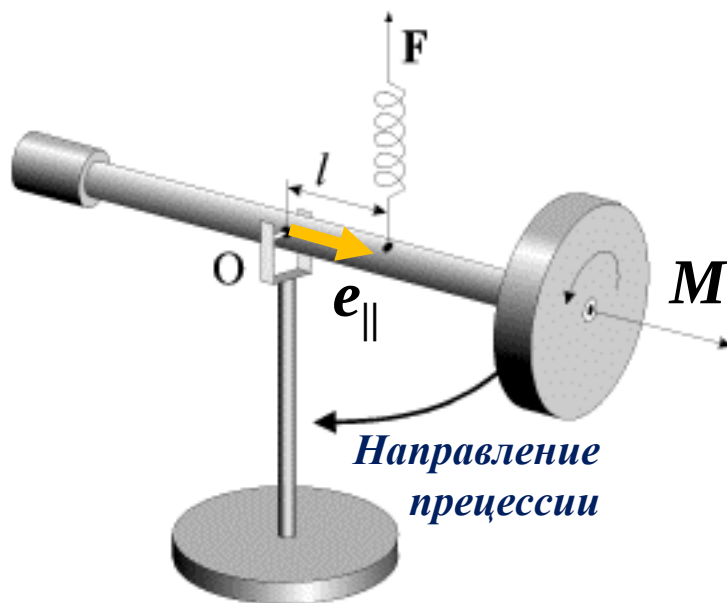


Схема симметрического гироскопа

Симметрический волчок. $e_{\parallel}$ - единичный вектор по оси симметрии.

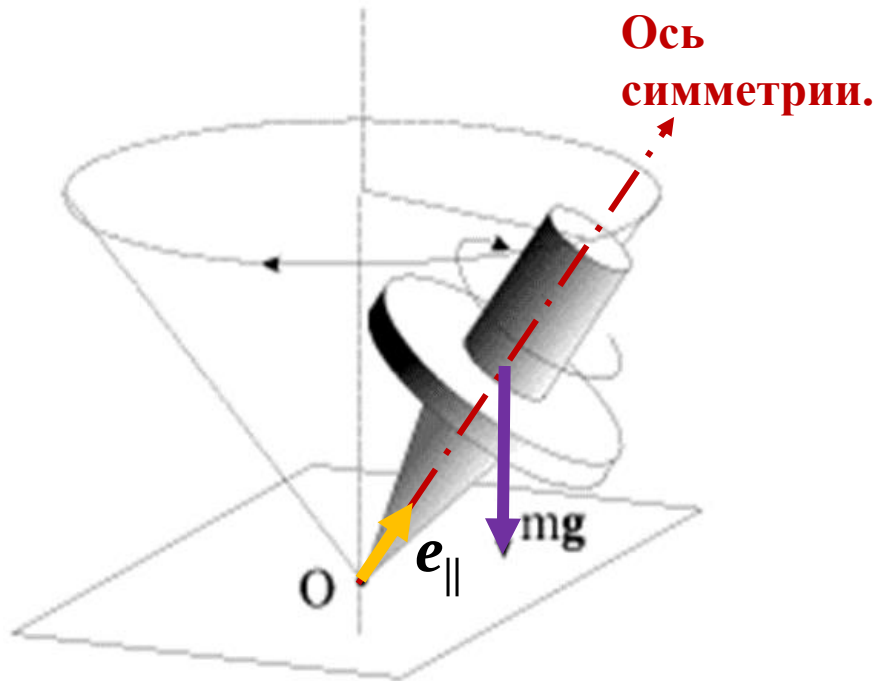
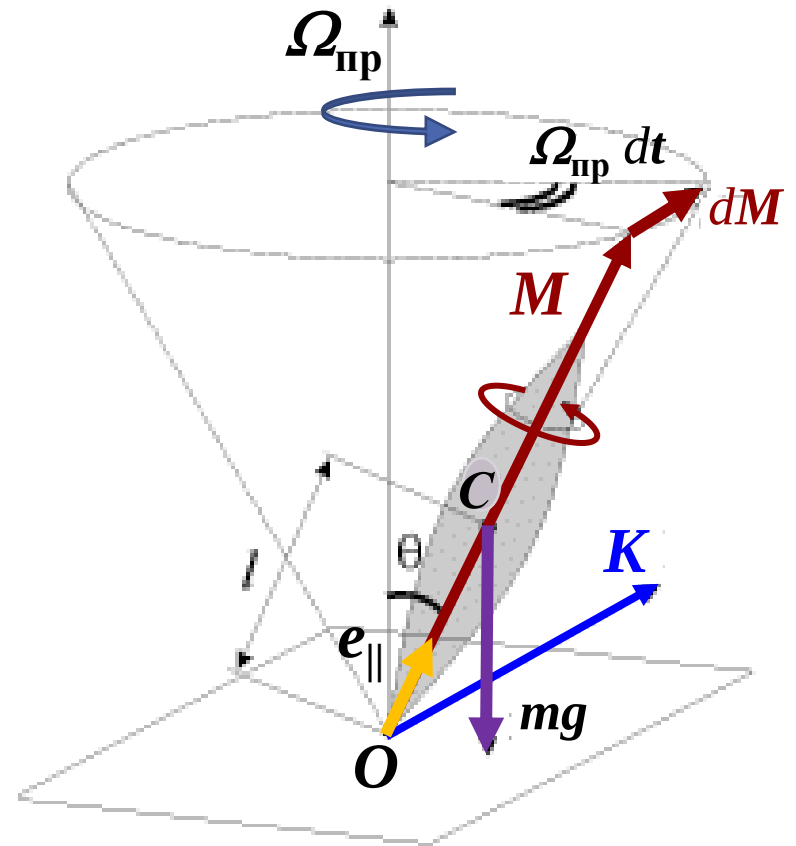


Схема симметрического вращающегося волчка. $e_{\parallel}$ - единичный вектор в направлении оси симметрии.



M - момент импульса вращающегося волчка, dM – приращение M
 $\Omega_{\text{пр}}$ - угловая скорость прецессии
 K - момент сил тяжести относительно т. касания O

31. Свободное движение шарового и симметрического волчков.

Df. Твердое тело, обладающее сферической симметрией называется шаровым волчком.

Df. Твердое тело, обладающее симметрией относительно некоторой оси называется симметрическим (осесимметричным) волчком.

Df. Свободным называется движение в отсутствии:

1) внешних сил $F = 0$; а также, 2) моментов сил $K = 0$.

В свободном движении импульс тела и момент импульса относительно оси, проходящей через центр масс (ЦМ) тела сохраняются.

$$1) dP/dt = 0 \rightarrow P_{\text{ЦМ}} = \text{const}; \quad 2) dM/dt = 0 \rightarrow M_{\text{ЦМ}} = \text{const}.$$

Выберем инерциальную систему отсчета, в которой центр масс покоится:

$$V_{\text{ЦМ}} = 0,$$

Поместим начало отсчета собственной, подвижной системы в центр масс тела: координаты т. $O - x, y, z = 0$.

31.1. Движение шарового волчка.

Для шарового волчка, волчка имеющего сферическую симметрию все моменты инерции относительно любой оси, проходящей через центр масс:

$$I_1 = I_2 = I_3.$$

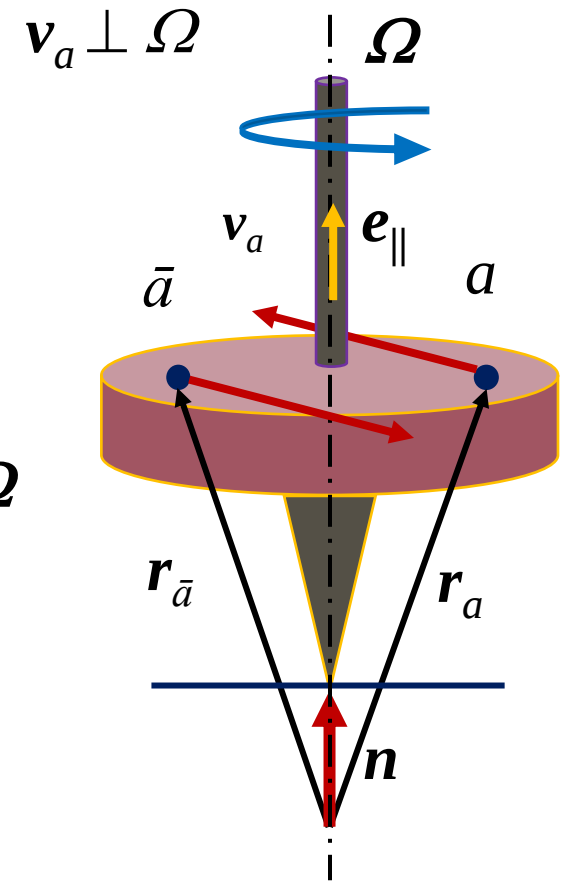
Момент импульса, по определению:

$$\vec{M} = I_i \vec{\Omega} = \overrightarrow{const}, \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = I_i \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0 ,$$

Сохранение момента импульса эквивалентно неизменности вектора угловой скорости $\vec{\Omega} = const$. Причем $\vec{M} \parallel \vec{\Omega}$.

31.2. Движение симметрического (осесимметричного) волчка.

В общем случае
для симметрического волчка $\vec{M} \nparallel \vec{\Omega}$.
Однако, существуют два особых случая
для симметрического волчка, когда $\vec{M} \parallel \vec{\Omega}$



**31.2.1. Угловая скорость параллельна
оси симметрии волчка $\Omega \parallel e_{\parallel}$.**

Докажем: $M \parallel \Omega$ (см. рис.)

**У каждой т. a существует
на противоположном
конце диаметра «анти» $\bar{a}$.**

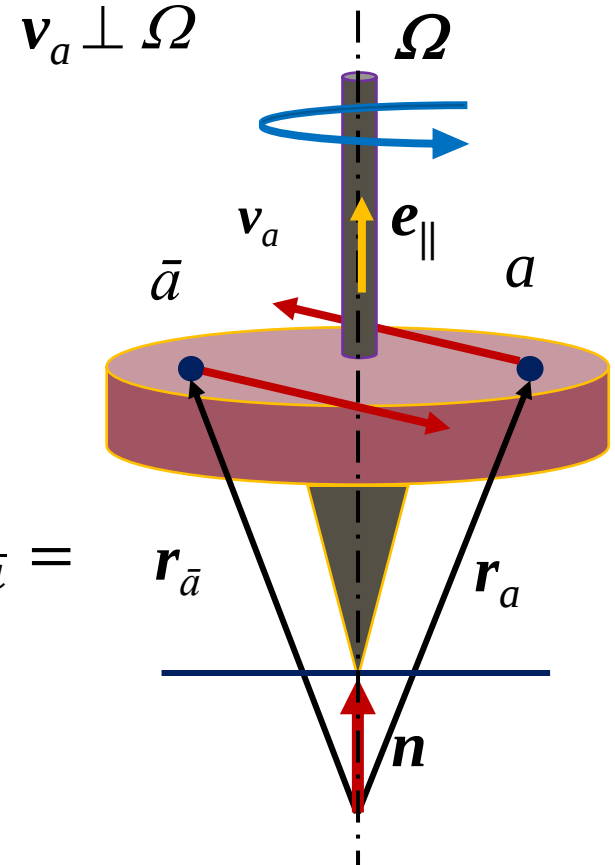
**Попарно, для точек $a + \bar{a}$
момент импульса M_{Σ} относительно
оси вращения:**

$$\begin{aligned}\vec{M}_{\Sigma} &= \vec{M}_a + \vec{M}_{\bar{a}} = m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a + m_{\bar{a}} \vec{r}_{\bar{a}} \times \vec{v}_{\bar{a}} = \\ &= m_a (\vec{r}_a - \vec{r}_{\bar{a}}) \times \vec{v}_a, \quad \vec{v}_{\bar{a}} = -\vec{v}_a;\end{aligned}$$

**Поскольку $v_a \perp \Omega$, то из свойств
векторного произведения**

$$\mathbf{M} \parallel \Omega \text{ ! (QED)}$$

при Ω параллельной оси вращения.



31.2.2. Угловая скорость перпендикулярна оси симметрии волчка $\Omega \perp e_{\parallel}$.

Докажем, в этом случае также: $M \parallel \Omega$.

$$v_a = v_{\bar{a}}; \quad v_a, v_{\bar{a}} \perp \Omega.$$

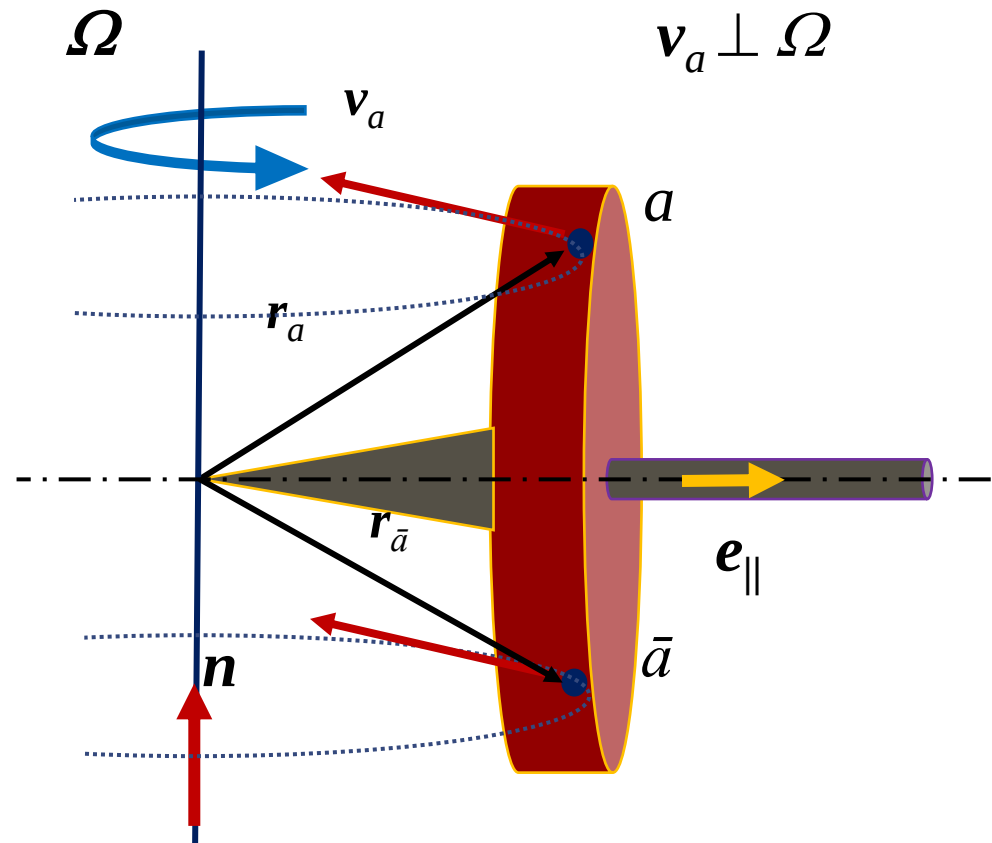
Вектор $r_a + r_{\bar{a}}$ параллелен
оси симметрии.

Следовательно:

$$\begin{aligned} M &= M_a + M_{\bar{a}} = \\ &= m_a (r_a + r_{\bar{a}}) \times v_a \parallel \Omega. \end{aligned}$$

Доказано $M \parallel \Omega$

при угловой скорости Ω
перпендикулярной
оси вращения.



31.2.3. Произвольное направление угловой скорости вращения относительно оси симметрии волчка.

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\parallel} + \vec{\Omega}_{\perp}.$$

**Проекции момента импульса волчка
соответственно:**

$$\vec{M}_{\parallel} = I_{\parallel} \vec{\Omega}_{\parallel}, \quad \vec{M}_{\perp} = I_{\perp} \vec{\Omega}_{\perp}.$$

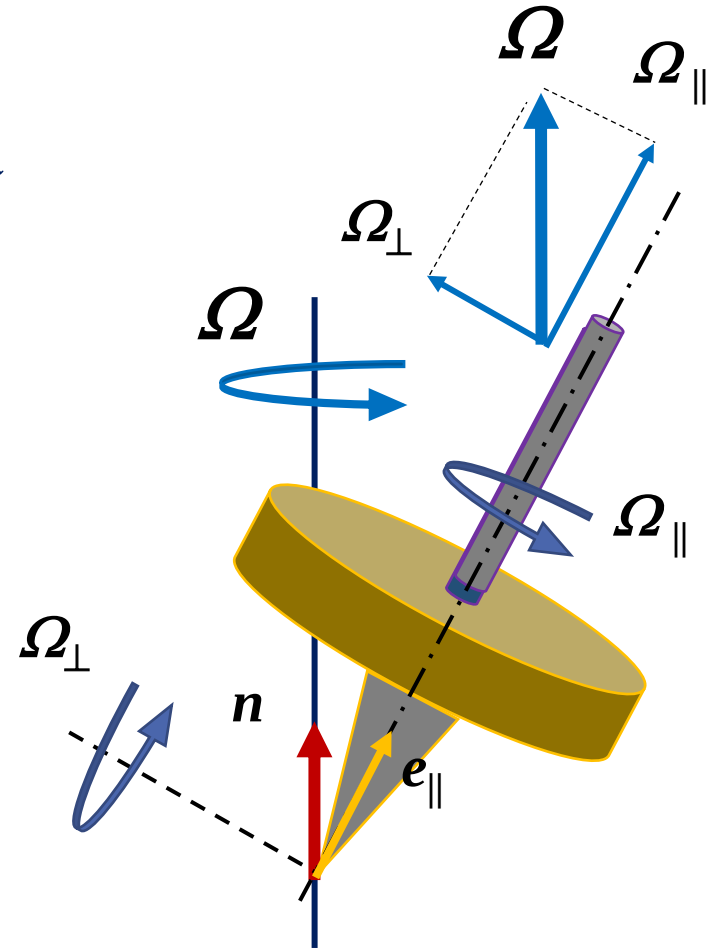
$I_{\parallel}$, $I_{\perp}$ - моменты инерции
относительно
направлений:

вдоль оси симметрии $I_{\parallel}$;

перпендикулярно

оси симметрии $I_{\perp}$.

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\parallel} + \vec{\Omega}_{\perp} = \frac{\vec{M}_{\parallel}}{I_{\parallel}} + \frac{\vec{M}_{\perp}}{I_{\perp}}.$$



Вводя единичный вектор вдоль оси симметрии волчка - $\mathbf{e}_{\parallel}$ перепишем:

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= \vec{\Omega}_{\parallel} + \vec{\Omega}_{\perp} = \\ &= \frac{\vec{M}_{\parallel}}{I_{\parallel}} + \frac{\vec{M}_{\perp}}{I_{\perp}} = \frac{\vec{M}_{\parallel}}{I_{\parallel}} + \frac{(\vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp})}{I_{\perp}} - \frac{\vec{M}_{\parallel}}{I_{\perp}} = \\ &= \left(\frac{\vec{M}_{\parallel}}{I_{\parallel}} - \frac{\vec{M}_{\parallel}}{I_{\perp}} \right) + \frac{\vec{M}}{I_{\perp}} = \vec{M}_{\parallel} \left(\frac{1}{I_{\parallel}} - \frac{1}{I_{\perp}} \right) + \frac{\vec{M}}{I_{\perp}} ; \\ \vec{\Omega} &= \left(\frac{M_{\parallel}}{I_{\parallel}} - \frac{M_{\parallel}}{I_{\perp}} \right) \vec{e}_{\parallel} + \frac{\vec{M}}{I_{\perp}} . \text{ (ПРЕЦ)}\end{aligned}$$

Утверждение.

Векторы полного момента импульса $\mathbf{M}$, угловой скорости $\mathbf{\Omega}$, единичный вектор вдоль оси симметрии волчка $\mathbf{e}_{\parallel}$ лежат в одной плоскости.

В свободном движении, когда отсутствуют внешние силы и моменты сил ($F = 0$, $K = 0$) выполняются законы сохранения полного момента импульса M и кинетической энергии тела K .

$$\vec{M} = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp} = I_{\parallel} \vec{\Omega}_{\parallel} + I_{\perp} \vec{\Omega}_{\perp} = \overrightarrow{const} ,$$

$$K = \frac{\vec{M} \vec{\Omega}}{2} = \frac{1}{2} \left(I_{\parallel} \vec{\Omega}_{\parallel} + I_{\perp} \vec{\Omega}_{\perp} \right) \left(\vec{\Omega}_{\parallel} + \vec{\Omega}_{\perp} \right) ;$$

$$K = \frac{1}{2} \left(I_{\parallel} \vec{\Omega}_{\parallel}^2 + I_{\perp} \vec{\Omega}_{\perp}^2 \right) = const . \quad (X)$$

Определим квадрат момента импульса M^2 :

$$\begin{aligned} & (\vec{M} = I_{\parallel} \vec{\Omega}_{\parallel} + I_{\perp} \vec{\Omega}_{\perp}) \\ \vec{M}^2 &= \left(I_{\parallel}^2 \vec{\Omega}_{\parallel}^2 + I_{\perp}^2 \vec{\Omega}_{\perp}^2 \right) = const . \quad (XX) \end{aligned}$$

Утверждение.

Равенства $(X) + (XX)$ выполняются одновременно при условии сохранения модулей векторов $\Omega_{\parallel}$ и $\Omega_{\perp}$.

Утверждение.

Векторы полного момента импульса M , угловой скорости Ω , единичный вектор вдоль оси симметрии волчка $e_{\parallel}$ сохраняют неизменное расположение и собственные длины.

В инерциальной системе координат, в которой момент импульса M неподвижен векторы Ω , $e_{\parallel}$ сохраняют взаимное направление и синхронно вращаются по образующим конических поверхностей вокруг направления момента импульса.

Синхронно – с одной угловой скоростью, которая является угловой скоростью прецессии $\Omega_{\text{прец}}$.

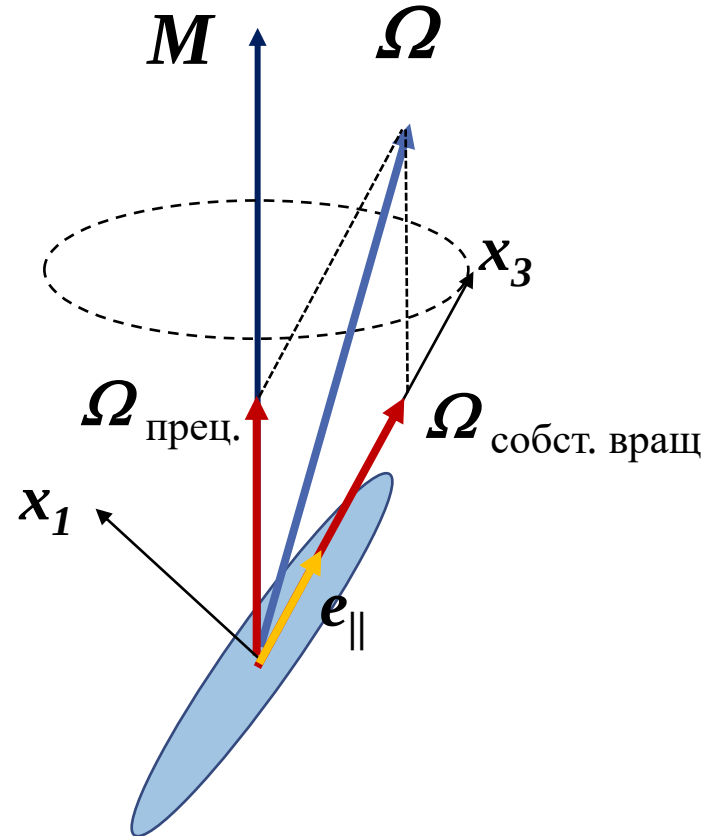
Df. Движение волчка с вращением угловой скорости Ω и вектора $e_{\parallel}$ вокруг вектора M называется регулярной прецессией.

Df. Частота прецессии $\Omega_{\text{прец}}$ — частота движения оси симметрии волчка (второе слагаемое в **(ПРЕЦ)**):

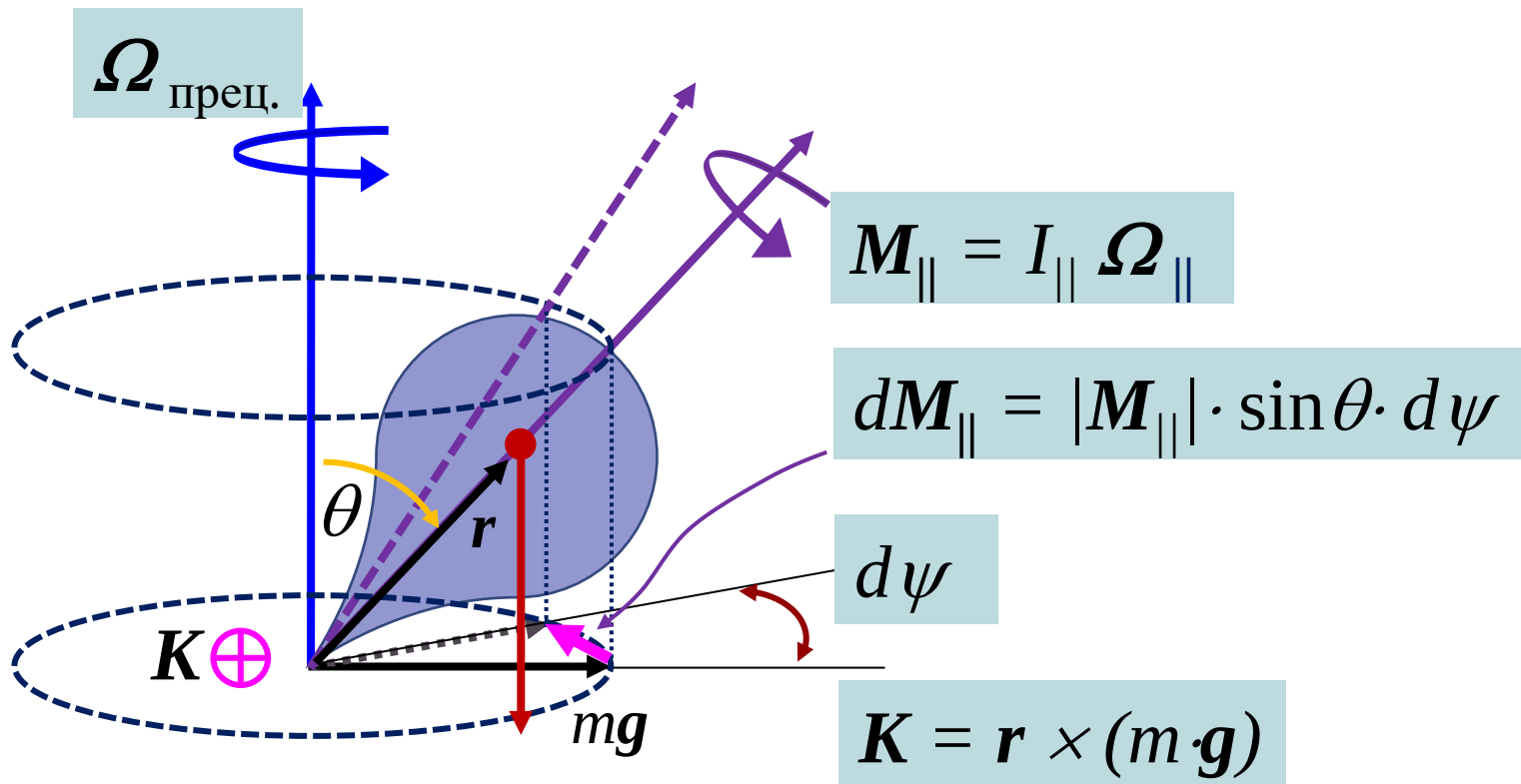
$$\Omega_{\text{прец.}} = M / I_{\perp} ;$$

Df. Собственная частота вращения волчка вокруг оси симметрии $\Omega_{\text{собств. вращ.}}$:

$$\vec{\Omega}_{\text{собств. вращ.}} = \left(\frac{M_{\parallel}}{I_{\parallel}} - \frac{M_{\parallel}}{I_{\perp}} \right) \vec{e}_{\parallel} .$$



31.2.3. Прецессия волчка на горизонтальном столе.



$$\begin{aligned} \frac{dM_{||}}{dt} &= |M_{||}| \sin \theta \frac{d\psi}{dt} = |M_{||}| \cdot \sin \theta \cdot \Omega_{\text{прец.}} = \\ &= K = mgr \sin \theta, \\ \Omega_{\text{прец.}} &= \frac{mgr}{M_{||}} = \frac{mgr}{I_{||} \Omega_{||}} \end{aligned}$$

31.2.4. Примеры.

1. Компенсация неуравновешенных моментов в подшипниках (балансировка колес).

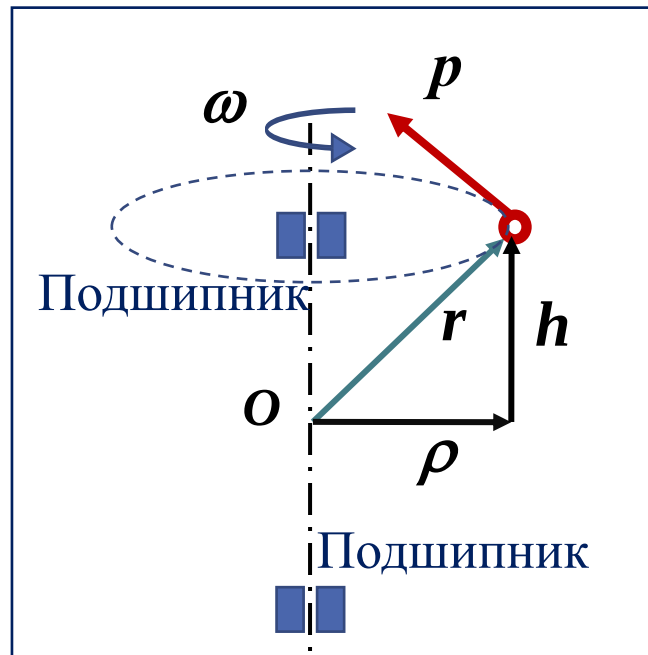
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} = (\vec{h} + \vec{\rho}) \times \vec{p} =$$

$$= \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp} = \vec{\rho} \times \vec{p} + \vec{h} \times \vec{p};$$

$$|M_{\perp}| = hm \cdot \omega r = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

$$M_x = |M_{\perp}| \cdot \cos(\omega t);$$

$$\frac{dM_x}{dt} = K_x = m\omega h |\rho| \sin(\omega t).$$



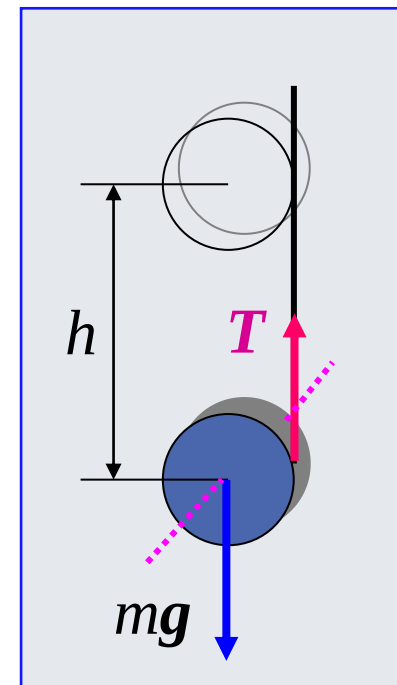
2. На цилиндр намотана веревка, один конец которой закреплен на потолке. Цилиндр отпускают, под действием силы тяжести он падает, разматывая веревку. Определить скорость падения после того, как цилиндр прошел расстояние h .

А. Сохранение энергии.

$$mgh = \frac{mv_{cm}^2}{2} + \frac{I_{cm}\omega^2}{2}, \quad v_{cm} = R\omega, \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_{cm}}{R}$$

$$mgh = \frac{mv_{cm}^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{mR^2}{2} \right) \left(\frac{v_{cm}}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} mv_{cm}^2,$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}.$$



31.2.4. Примеры. (продолжение)

В) Решение на основе уравнений динамики твердого тела.

Ускорение центра масс:

$$mg - T = ma_{cm} ,$$

Угловое ускорение:

$$TR = I_{cm} \frac{d\omega}{dt} = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{1}{R} \frac{dv_{cm}}{dt} ;$$

$$T = \frac{ma_{cm}}{2}, \quad \Rightarrow \quad a_{cm} = \frac{2}{3}g, \quad T = \frac{1}{3}mg ;$$

Движение равноускоренное:

$$v_{cm}^2 = 2a_{cm}h = \frac{4}{3}gh, \quad v_{cm} = \sqrt{\frac{4gh}{3}} .$$

32. Статика. Равновесие твердого тела.

Условия равновесия следуют из общих уравнений динамики твердого тела:

32.1.1. Условия равновесия.

Df. Необходимыми условиями равновесия тела являются:

1) $\sum F = 0$;

2) $\sum K = 0$.

1). Сумма внешних сил действующих на тело равна нулю.

2). Сумма моментов внешних сил равна нулю.

Примеры.

Рычаг Архимеда.

Какой силой

можно удерживать груз m ?

$$1. \quad F + mg + F_O = 0 ;$$

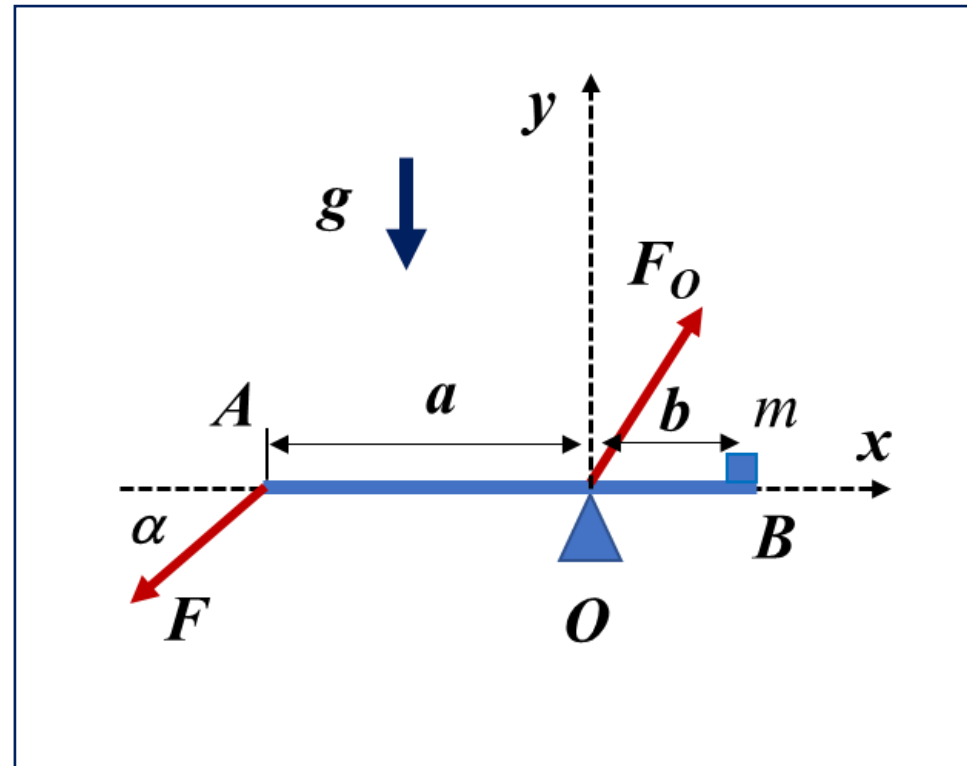
Моменты сил

относительно оси, проходящей
через т. опоры, т. O

(вращение против часовой
стрелки- положительны,

вращение по часовой

стрелке – момент отрицателен):



$$2. \quad K_z = a \cdot F \sin \alpha - b \cdot mg = 0 ,$$

$$F = (b / a \sin \alpha) \cdot mg ;$$

$$b / a \sin \alpha \ll 1 , \quad \rightarrow \quad F \ll mg .$$

Мостовой кран.

Определить нагрузки на опоры $F_{1,2}$

1. $F_1 + F_2 = mg + P$;

m – масса кран – балки.

2. Моменты сил относительно точки подвеса груза, т. О :

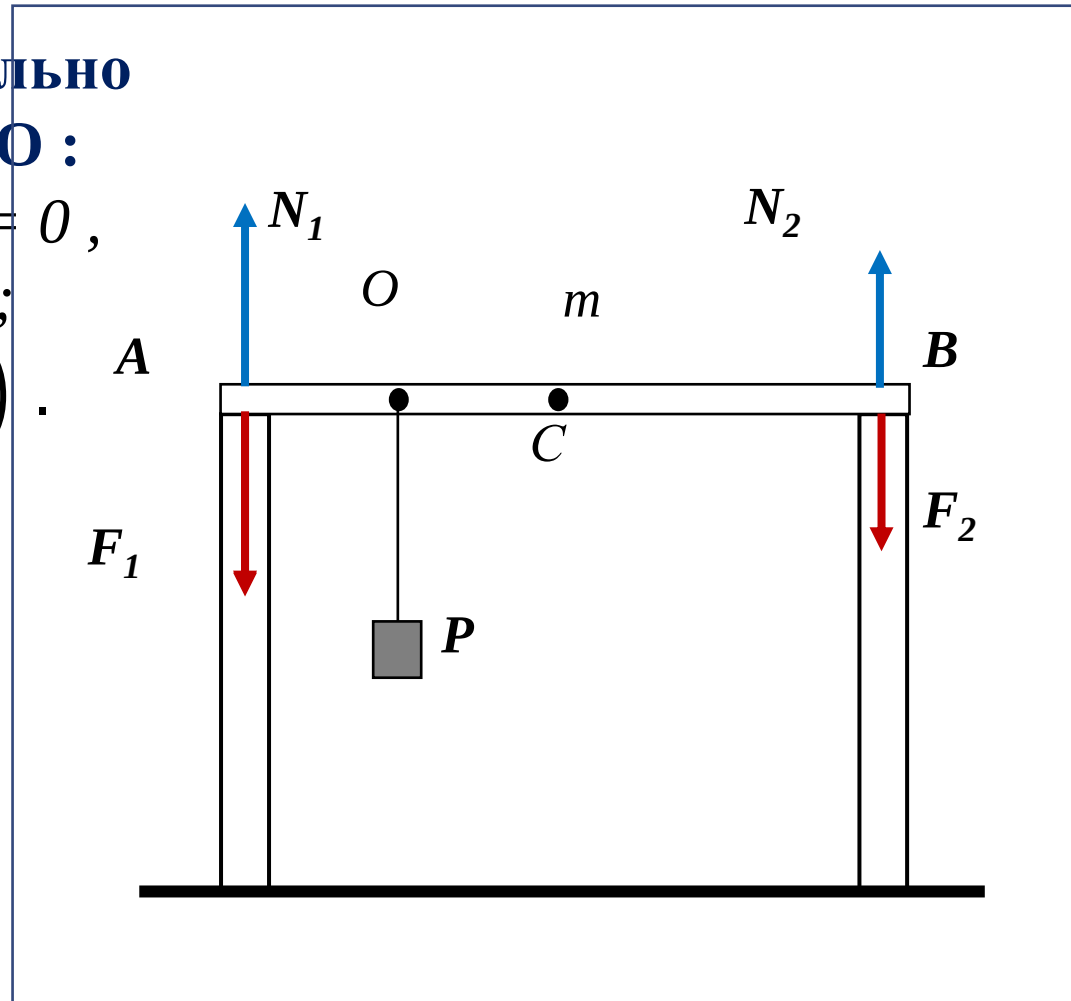
$$F_2 \cdot OB - F_1 \cdot AO - mg \cdot OC = 0 ,$$

$$OC = d , \quad AB = L ;$$

$$F_{1,2} = \frac{mg}{2} + P \left(\frac{1}{2} \pm \frac{d}{L} \right) .$$

Анализ:

$$mg/2 \leq F_{1,2} \leq mg/2 + P .$$



32.1.2 Принцип виртуальной работы. (Даламбера).

Пример.

Определить натяжение троса T
в трехзвенном ($n -$ звенном)
безмассовом шарнире.

Работа при малом смещении по
вертикали т. A :

$$A = T \Delta h ,$$

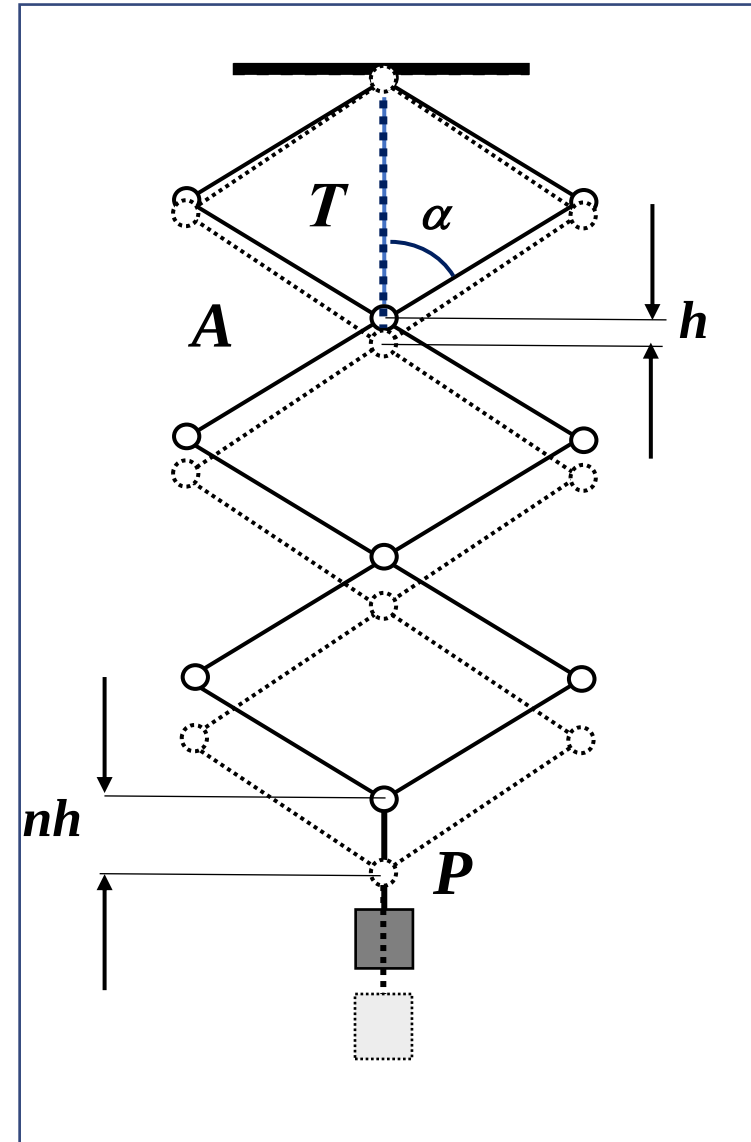
Изменение потенциальной
энергии груза:

$$\Delta U = P \cdot 3 \Delta h .$$

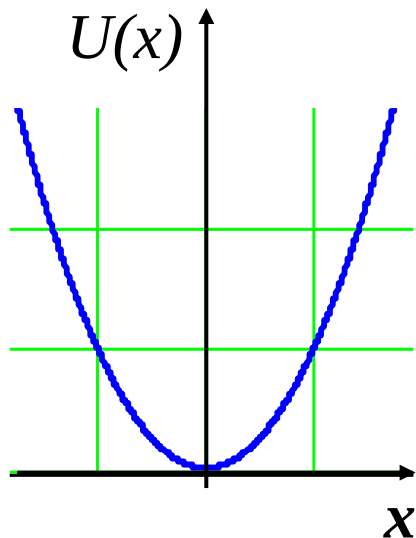
Из $A = \Delta U$ получаем:

$$T = 3P ;$$

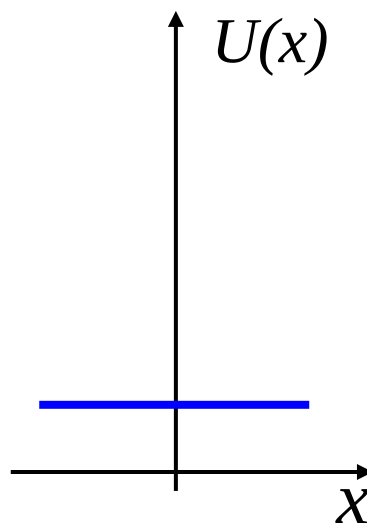
для n звеньев $T = nP$.



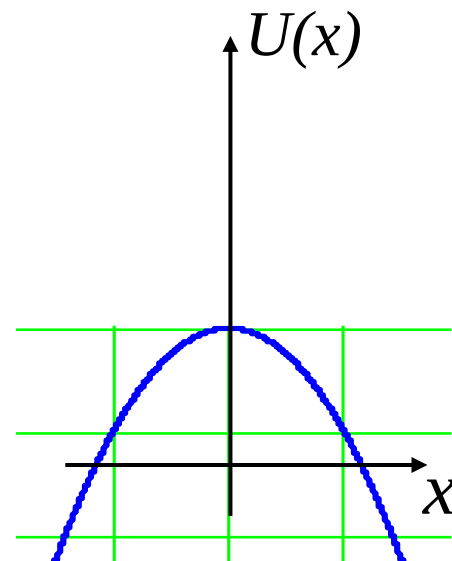
32.1.3. Устойчивость механических систем.



Равновесие устойчивое
Есть возвращающая
сила $F \propto -x$



Безразличное положение
Возвращающей силы нет.
 $F = 0$



Неустойчивое положение.
Сила «выводит» из
положения равновесия
 $F \propto +x$

Разложение потенциальной энергии по малости
вблизи экстремума.

$$U(x) = U_0 + C \cdot x^2 + O(x^n)$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

<http://phys.nsu.ru/fit>

<http://el.nsu.ru>